Vektoranalysis

Divergenz und Rotation

Vektoranalysis

Divergenz und Rotation

Anwendungsbeispiel

Übersicht:

- Nabla-Operator für Skalar- & Vektorfelder
- Herleitung und Bedeutung der Divergenz
- Herleitung und Bedeutung Rotation

Vom Gradienten zum Nabla-Operator

Wir kennen bereits den Gradienten eines Vektorfeldes…



$$\mathrm{grad} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{pmatrix}$$

Vom Gradienten zum Nabla-Operator

Wir kennen bereits den Gradienten eines Vektorfeldes…

$$\text{grad} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{pmatrix}$$

Eine übliche Notation verwendet den Nabla-Operator:

$$\nabla = \vec{e}_1 \cdot \partial_{x_1} + \vec{e}_2 \cdot \partial_{x_2} + \cdots \vec{e}_n \cdot \partial_{x_n} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix}$$

Der Nabla-Operator ergibt nur Sinn, wenn wir ihn auf etwas anwenden…

$$\nabla = \vec{e}_1 \cdot \partial_{x_1} + \vec{e}_1 \cdot \partial_{x_2} + \cdots \vec{e}_1 \cdot \partial_{x_n} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix}$$

Anwendung des Nabla-Operators

Wir können den Nabla-Operator auf Skalar- und auf Vektorfelder anwenden…

Skalarfelder:

$$\nabla f = \vec{e}_1 \cdot \partial_{x_1} f + \vec{e}_1 \cdot \partial_{x_2} f + \cdots \vec{e}_1 \cdot \partial_{x_n} f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{pmatrix}$$

Vektorfelder:

$\vec{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots \partial_{x_n}\right) \cdot \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ F_n(\vec{x}) \end{pmatrix} = \partial_{x_1} F_1(\vec{x}) + \partial_2 F_2(\vec{x}) + \cdots \partial_{x_n} F_n(\vec{x})$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} F_3 - \partial_{x_3} F_2 \\ \partial_{x_3} F_1 - \partial_{x_1} F_3 \\ \partial_{x_1} F_2 - \partial_{x_2} F_1 \end{pmatrix}$$

Ergibt das Sinn?

Wenn in 3d: $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Divergenz und Rotation

Jetzt sind Sie an der Reihe

Bevor wir uns überlegen, was die Divergenz und die Rotation beschreiben, rechnen wir zwei Beispiele…

$$\nabla \cdot \vec{F} = \partial_{x_1} F_1(\vec{x}) + \partial_2 F_2(\vec{x}) + \cdots \partial_{x_n} F_n(\vec{x}) \qquad \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} F_3 - \partial_{x_3} F_2 \\ \partial_{x_3} F_1 - \partial_{x_1} F_3 \\ \partial_{x_1} F_2 - \partial_{x_2} F_1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation!

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_2^3 \\ x_1 x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} =$$

$$\nabla \times \vec{F} =$$

Jetzt sind Sie an der Reihe

Bevor wir uns überlegen, was die Divergenz und die Rotation beschreiben, rechnen wir zwei Beispiele…

$$\nabla \cdot \vec{F} = \partial_{x_1} F_1(\vec{x}) + \partial_2 F_2(\vec{x}) + \cdots \partial_{x_n} F_n(\vec{x}) \qquad \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} F_3 - \partial_{x_3} F_2 \\ \partial_{x_3} F_1 - \partial_{x_1} F_3 \\ \partial_{x_1} F_2 - \partial_{x_2} F_1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation!

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ x_2^3 \\ x_1 x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = x_2^2 + 3x_2^2 + 1 = 4x_2^2 + 1$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ -2x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Herleitung & Bedeutung: Divergenz

Wir betrachten die Strömung einer Flüssigkeit, die durch das Geschwindigkeitsfeld beschrieben wird:

$$\vec{v}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Herleitung & Bedeutung: Divergenz

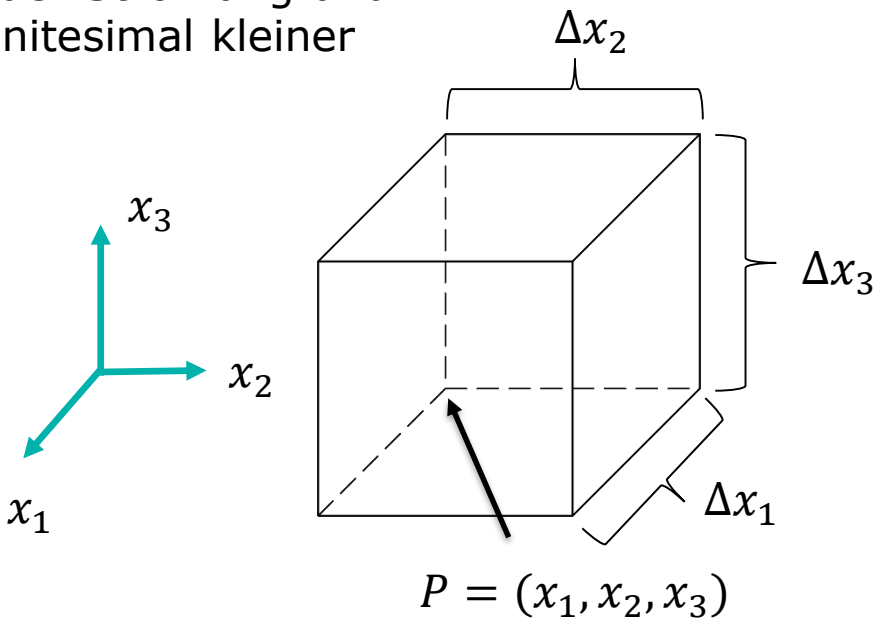
Wir betrachten die Strömung einer Flüssigkeit, die durch das Geschwindigkeitsfeld beschrieben wird:

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

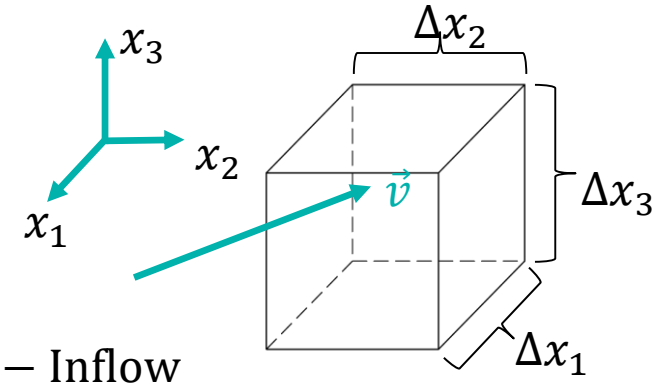
Wir betrachten einen beliebigen Punkt P in der Strömung und denken uns dort ein „Kontrollvolumen" (infinitesimal kleiner Würfel/Quader)…

Volumen: $\Delta V = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$

Wir interessieren uns für den Durch-Fluss, d.h. den Volumenstrom im Punkt P…



Durchfluss im Punkt P



Gesucht ist der Volumenstrom… $\dot{V} = \text{Outflow} - \text{Inflow}$

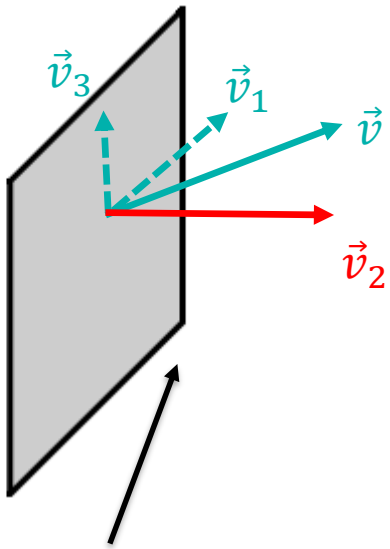
Wir betrachten die Seitenflächen (vorne/hinten, links/rechts und oben/unten) jeweils getrennt und summieren!

$$Outlow = v_2(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_3$$

$$- \; Inflow = v_2(x_1, x_2, x_3) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_3$$

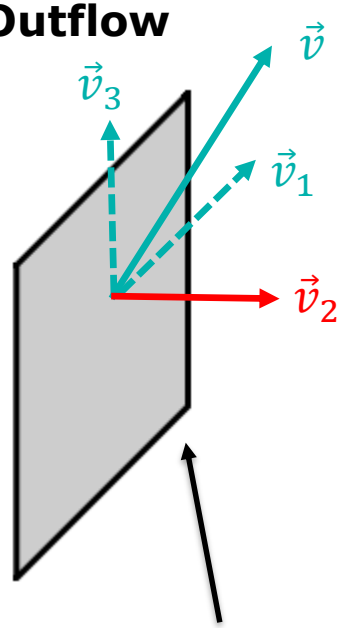
$$\dot{V}_2 = v_2(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_3 - v_2(x_1, x_2, x_3) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_3$$

Inflow



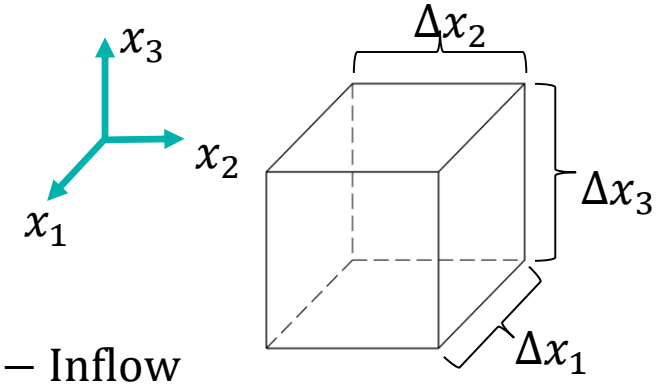
$P = (x_1, x_2, x_3)$

Outflow



$Q = (x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3)$

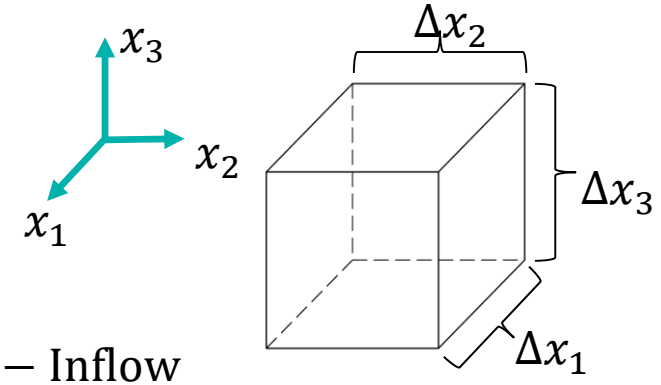
Durchfluss im Punkt P



Gesucht ist der Volumenstrom… $\dot{V} = \text{Outflow} - \text{Inflow}$

Wir betrachten die Seitenflächen (vorne/hinten, links/rechts und oben/unten) jeweils getrennt und summieren!

Wir gehen bei den anderen Flächen analog vor…



Durchfluss im Punkt P

Gesucht ist der Volumenstrom… $\dot{V} = \text{Outflow} - \text{Inflow}$

➡ Wir betrachten die Seitenflächen (vorne/hinten, links/rechts und oben/unten) jeweils getrennt und summieren!

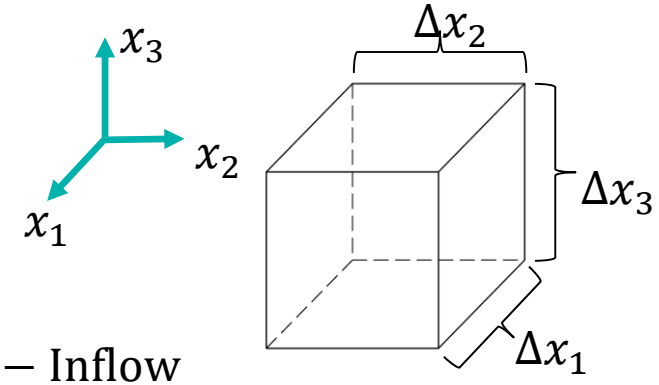
Wir gehen bei den anderen Flächen analog vor…

$x_1 - x_3$ –Fläche: $\dot{V}_2 = v_2(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_3 - v_2(x_1, x_2, x_3) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_3$

$x_1 - x_2$ –Fläche: $\dot{V}_3 = v_3(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 - v_3(x_1, x_2, x_3) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2$

$x_2 - x_3$ –Fläche: $\dot{V}_1 = v_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3 - v_1(x_1, x_2, x_3) \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES



Durchfluss im Punkt P

Gesucht ist der Volumenstrom… $\dot{V} = \text{Outflow} - \text{Inflow}$

Wir ergänzen Δx_1, Δx_2 bzw. Δx_3 und klammern aus…

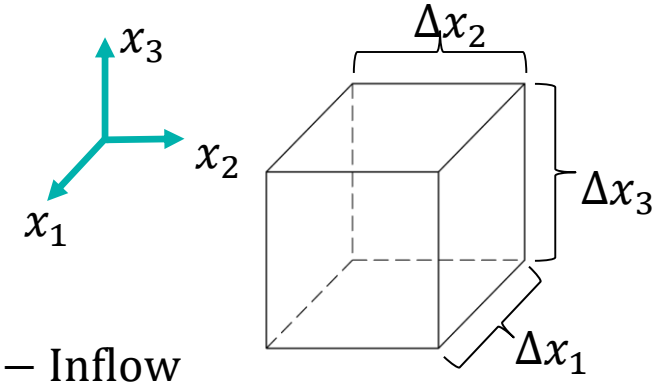
ΔV

$x_1 - x_3$ –Fläche: $$\dot{V}_2 = \frac{v_2(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - v_2(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_2} \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$$

$x_1 - x_2$ –Fläche: $$\dot{V}_3 = \frac{v_3(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - v_3(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3} \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$$

$x_2 - x_3$ –Fläche: $$\dot{V}_1 = \frac{v_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - v_1(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$$

„Ableitung"… Grenzübergang $\Delta x_1 \to 0$ … ⇒ $\partial_{x_1} v_1(P)$



Durchfluss im Punkt P

Gesucht ist der Volumenstrom… $\dot{V} = \text{Outflow} - \text{Inflow}$

Grenzübergang $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0$ und $\Delta x_3 \to 0$ …

$x_1 - x_3$ –Fläche: $\dot{V}_2 = \partial_{x_2} v_2(x_1, x_2, x_3) \cdot dV$ ⟸ Aus ΔV wird beim Grenzübergang dV

$x_1 - x_2$ –Fläche: $\dot{V}_3 = \partial_{x_3} v_3(x_1, x_2, x_3) \cdot dV$ **+**

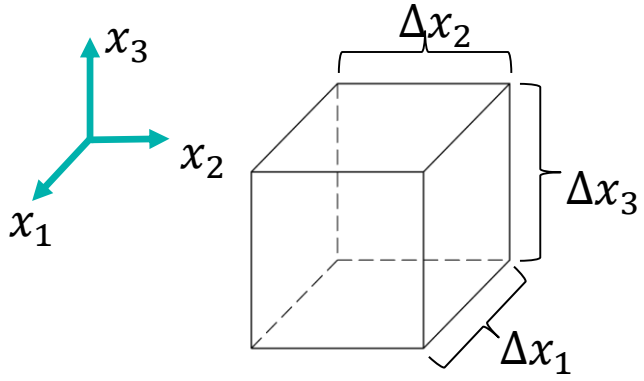
$x_2 - x_3$ –Fläche: $\dot{V}_1 = \partial_{x_1} v_1(x_1, x_2, x_3) \cdot dV$ **+**

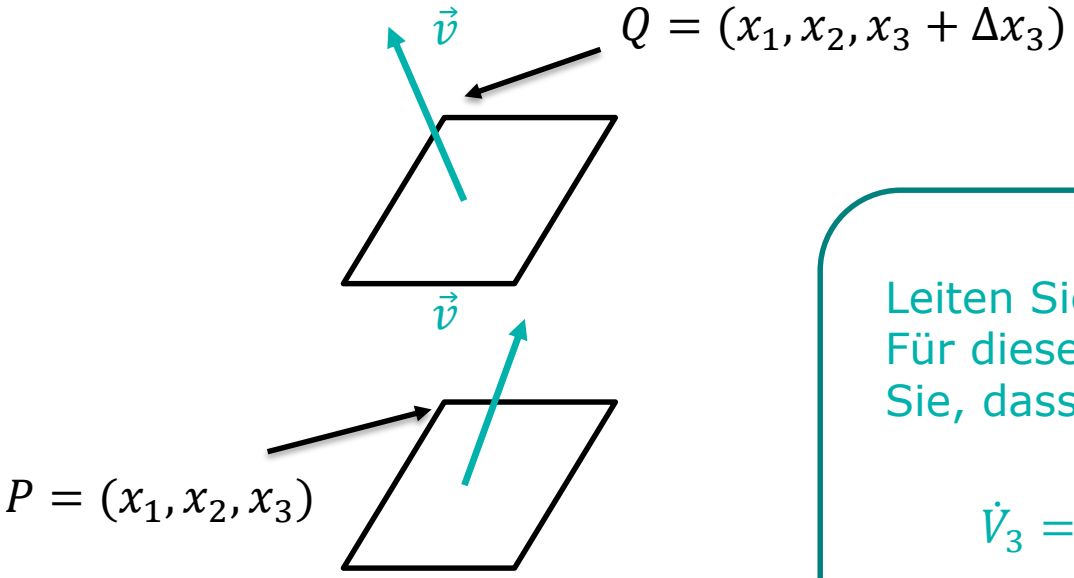
$$\dot{V} = \underbrace{\left(\partial_1 v_1(x_1, x_2, x_3) + \partial_{x_2} v_2(x_1, x_2, x_3) + \partial_{x_3} v_3(x_1, x_2, x_3)\right)}_{= \operatorname{div} \vec{v}(x_1, x_2, x_3)} \cdot dV$$

Gesamtvolumenstrom

Übungsaufgabe...

Wir betrachten die $x_1 - x_2$ –Fläche:





Leiten Sie die entsprechende Formel Für diese Seitenfläche her, d.h. zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\dot{V}_3 = \partial_{x_3} v_3(x_1, x_2, x_3) \cdot dV$$

Bedeutung der Divergenz

Wir haben folgende Formel für den Durchfluss (Gesamtvolumenstrom) gefunden…

$$\dot{V} = \underbrace{\left(\partial_1 v_1(x_1, x_2, x_3) + \partial_{x_2} v_2(x_1, x_2, x_3) + \partial_{x_3} v_3(x_1, x_2, x_3)\right)}_{= \operatorname{div} \vec{v}(x_1, x_2, x_3)} \cdot dV$$

Die Divergenz beschreibt Quellen/Senken:

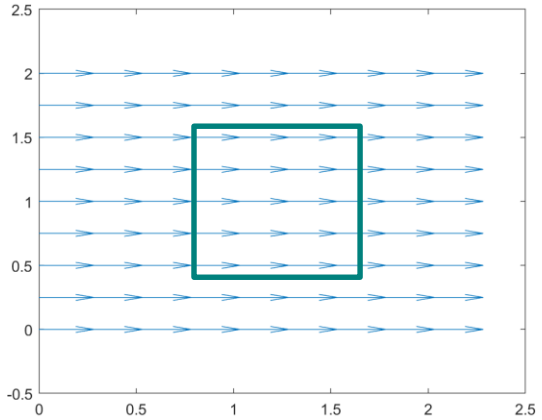
$\operatorname{div} \vec{F} > 0$ ⇒ Quelle

$\operatorname{div} \vec{F} < 0$ ⇒ Senke

$\operatorname{div} \vec{F} = 0$ ⇒ quellfreies Feld

Beispiele

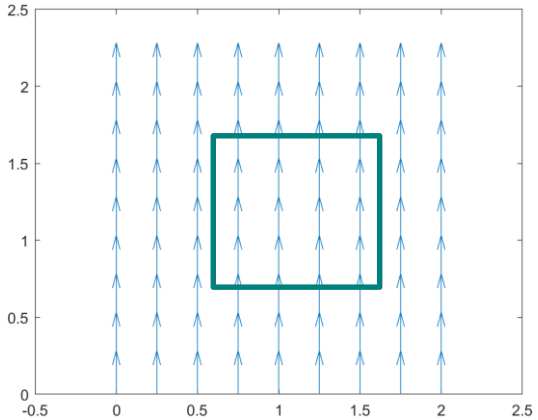
Wir betrachten die konstanten Vektorfelder…



$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Es fließt genauso viel hinein, wie heraus…

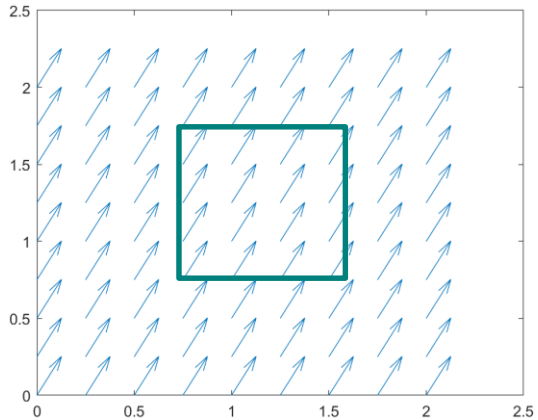
→ $\operatorname{div} \vec{F} = 0$



$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

→ Es fließt genauso viel hinein, wie heraus…

→ $\operatorname{div} \vec{F} = 0$



$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

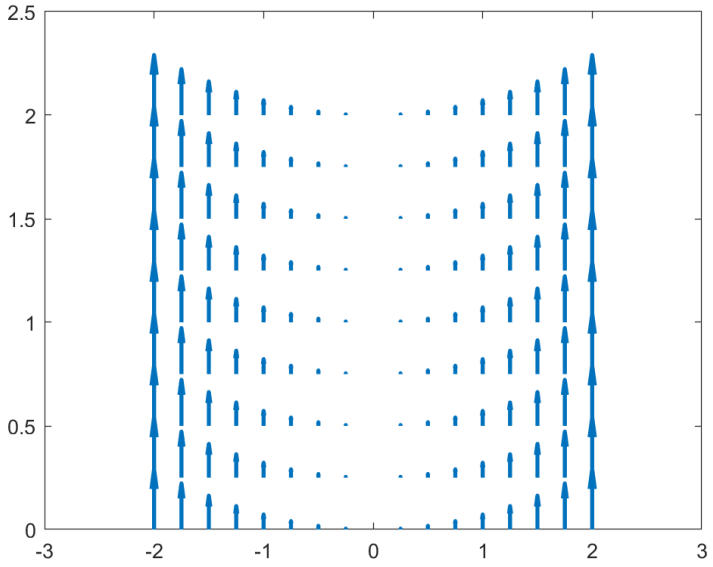
→ Es fließt genauso viel hinein, wie heraus…

→ $\operatorname{div} \vec{F} = 0$

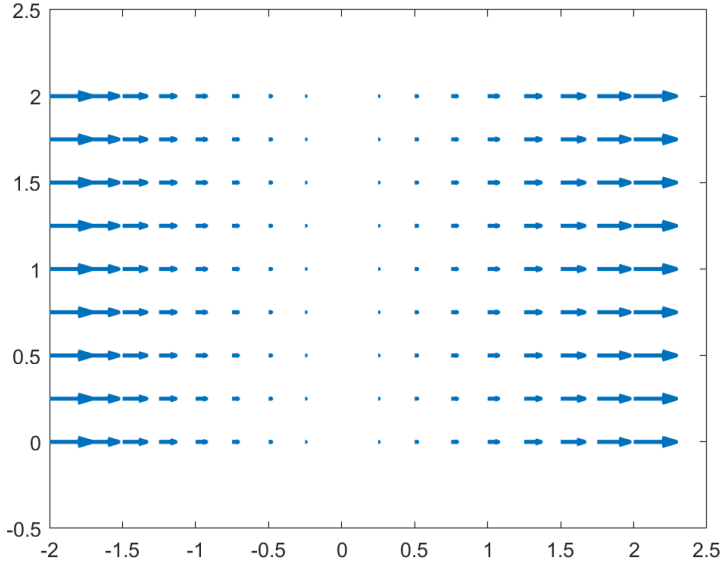
Jetzt sind Sie an der Reihe...

Bestimmen Sie zunächst mit Hilfe der Skizze die Divergenz („<>=0“?).

Bestätigen Sie ihr Ergebnis anschließend durch Rechnung.



$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$



$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rotation eines Vektorfeldes

Wir wollen nun anschaulich verstehen, was die Rotation aussagt…

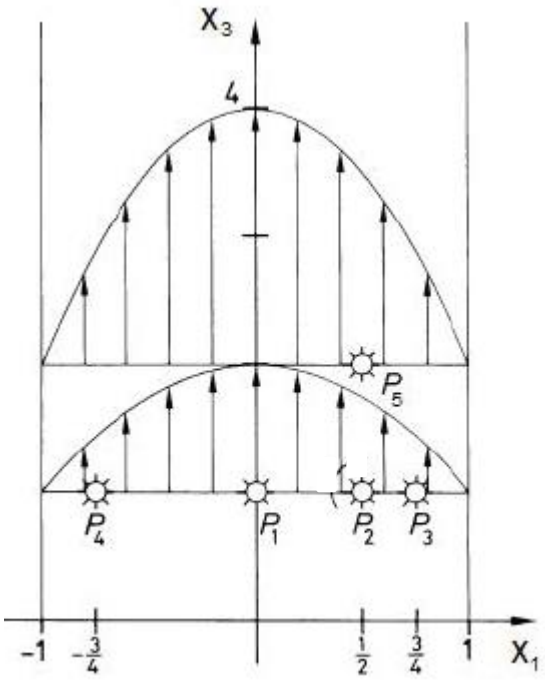
FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Rotation eines Vektorfeldes

Wir wollen nun anschaulich verstehen, was die Rotation aussagt…

Wir betrachten folgendes Strömungsfeld…

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \cdot \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \end{pmatrix}$$

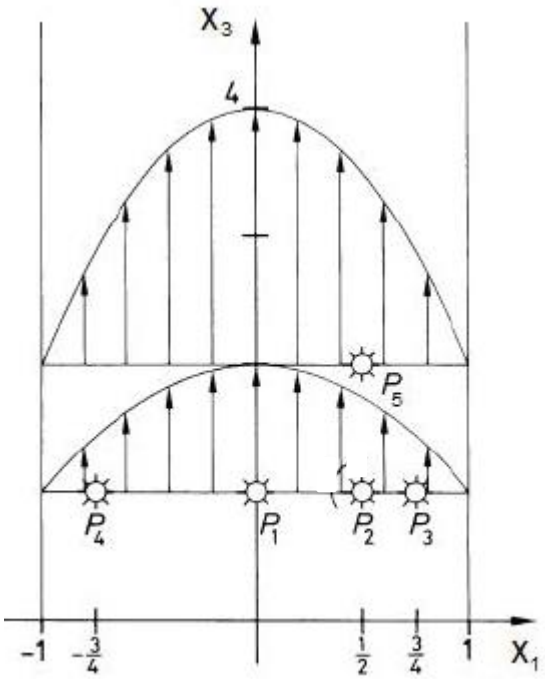


Rotation eines Vektorfeldes

Wir wollen nun anschaulich verstehen, was die Rotation aussagt…

Wir betrachten folgendes Strömungsfeld…

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \cdot \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \end{pmatrix}$$



Wir stellen uns kleine Wasserräder (oder Partikel) in der Strömung vor.

- Rotieren diese Wasserräder?
- Wie rotieren sie?
- Wie schnell rotieren sie?



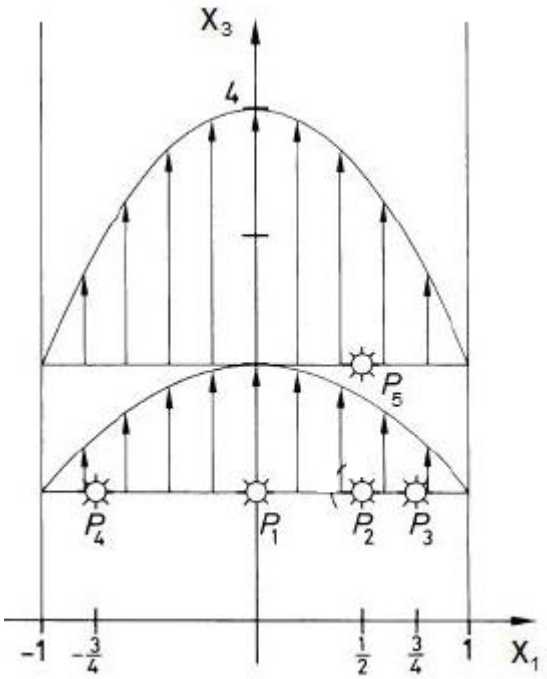
Korkenzieherregel
(rechte Handregel)

Rotation eines Vektorfeldes

Wir wollen nun anschaulich verstehen, was die Rotation aussagt…

Wir betrachten folgendes Strömungsfeld…

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \cdot \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \end{pmatrix}$$



Wir berechnen die Rotation in den Punkten…

$$\text{rot}\,\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2x_2x_3 \\ 3x_1x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rot}\,(P_1) = \vec{0}$

$\text{rot}\,(P_2) = (0, 1, 0)^T$

$\text{rot}\,(P_3) = (0, 1.5, 0)^T$

$\text{rot}\,(P_4) = (0, -1.5, 0)^T$

$\text{rot}\,(P_5) = (0, 2, 0)^T$

Rotation eines Vektorfeldes

Das Fazit aus diesem Beispiel…

Zur Bestimmung der Rotation können wir uns kleine Wasserräder in einer Strömung vorstellen. Ob diese Rotieren und in welchem Umlaufsinn sie rotieren, gibt die Rotation des Vektorfeldes an.

Rotation eines Vektorfeldes

Das Fazit aus diesem Beispiel…

Zur Bestimmung der Rotation können wir uns kleine Wasserräder in einer Strömung vorstellen. Ob diese Rotieren und in welchem Umlaufsinn sie rotieren, gibt die Rotation des Vektorfeldes an.

Bemerkungen:

Rotation eines Vektorfeldes

Das Fazit aus diesem Beispiel…

Zur Bestimmung der Rotation können wir uns kleine Wasserräder in einer Strömung vorstellen. Ob diese Rotieren und in welchem Umlaufsinn sie rotieren, gibt die Rotation des Vektorfeldes an.

Bemerkungen:

Die Rotation ist nur für 3d Vektorfelder (wegen dem Kreuzprodukt) definiert. Sie kann aber auch auf 2d Vektorfelder erweitert werden, wenn wir eine null als dritte Komponente ergänzen.

Rotation eines Vektorfeldes

Das Fazit aus diesem Beispiel…

Zur Bestimmung der Rotation können wir uns kleine Wasserräder in einer Strömung vorstellen. Ob diese Rotieren und in welchem Umlaufsinn sie rotieren, gibt die Rotation des Vektorfeldes an.

Bemerkungen:

Die Rotation ist nur für 3d Vektorfelder (wegen dem Kreuzprodukt) definiert. Sie kann aber auch auf 2d Vektorfelder erweitert werden, wenn wir eine null als dritte Komponente ergänzen.

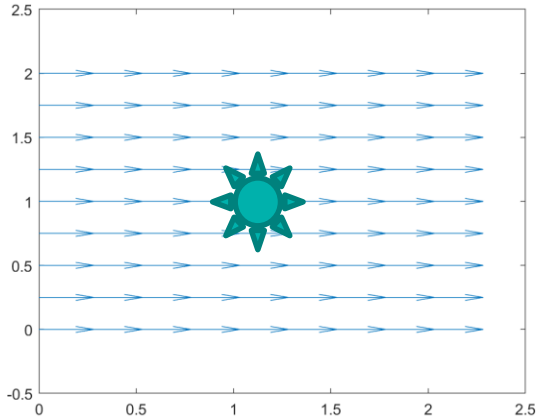
Im Englischen wird die Rotation als „curl" bezeichnen.

Vektoranalysis

Divergenz und Rotation

Beispiel

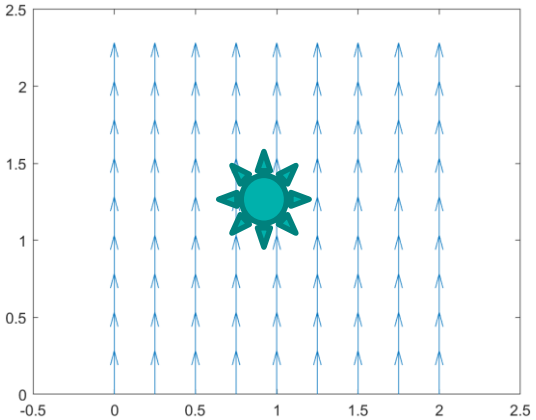
Wir betrachten die folgenden Vektorfelder bzgl. ihrer Rotation…



$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Rad rotiert nicht…

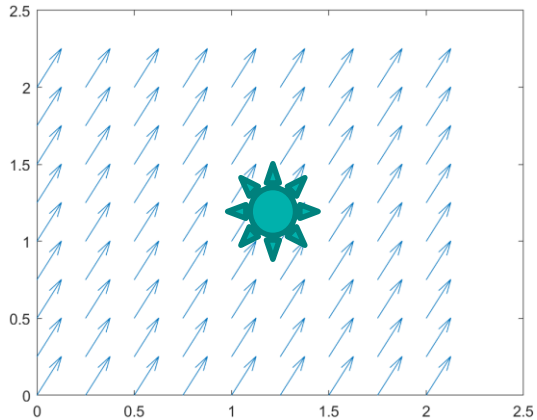
$rot\ \vec{F} = \vec{0}$



$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Das Rad rotiert nicht…

$rot\ \vec{F} = \vec{0}$



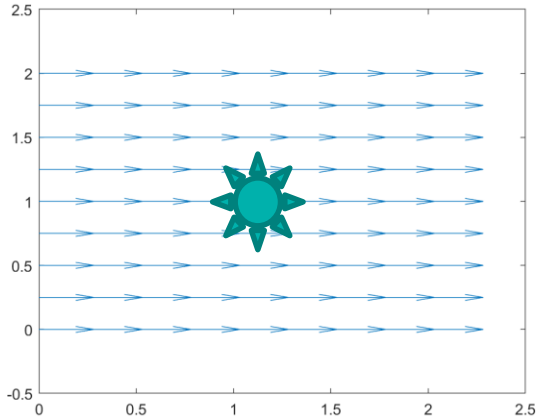
$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

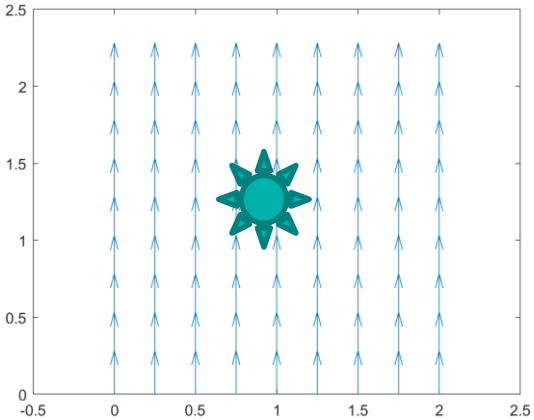
Das Rad rotiert nicht…

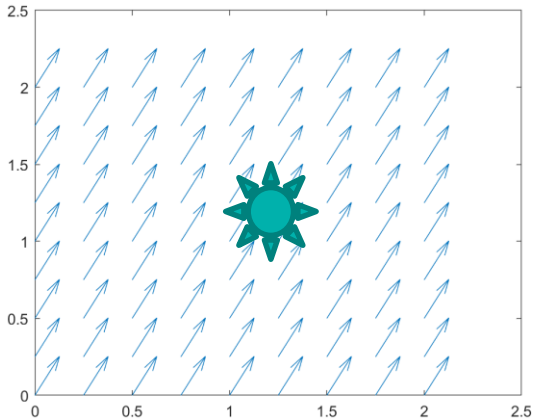
$rot\ \vec{F} = \vec{0}$

Beispiel

Wir betrachten die folgenden Vektorfelder bzgl. ihrer Rotation…







$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

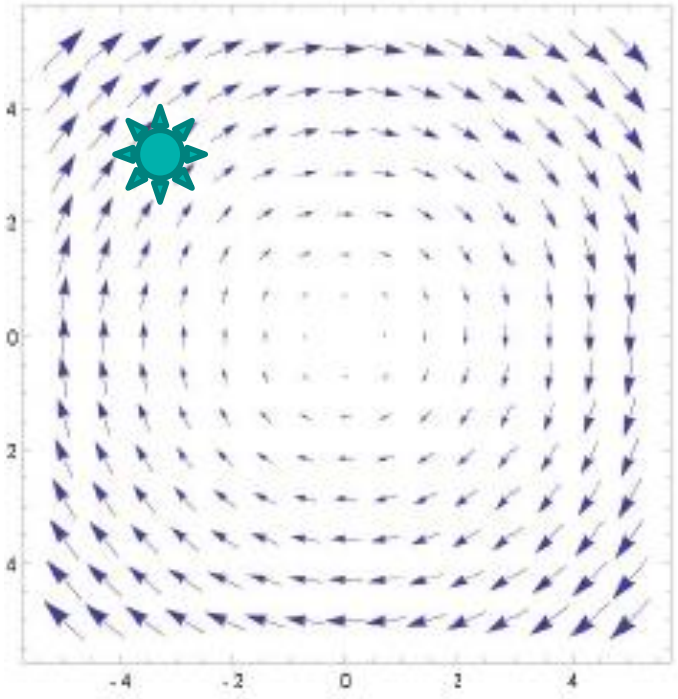
$$\Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektoranalysis

Divergenz und Rotation

Beispiel

Wir betrachten das folgende Vektorfeld bzgl. seiner Rotation…

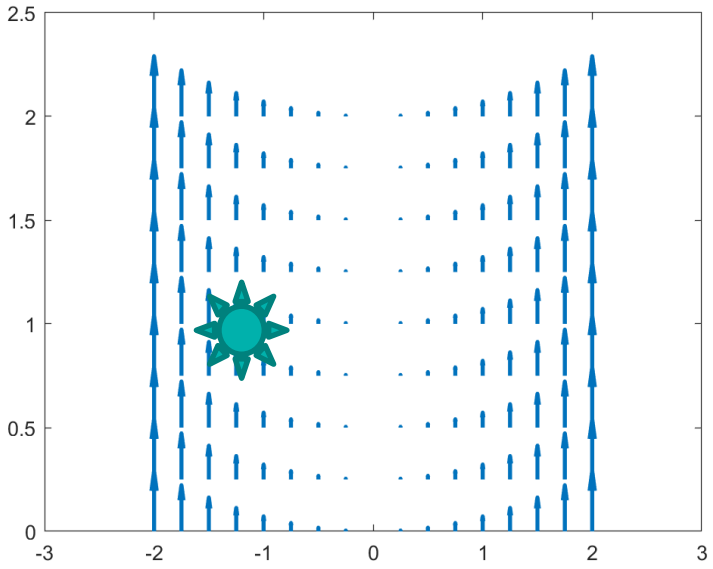


$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

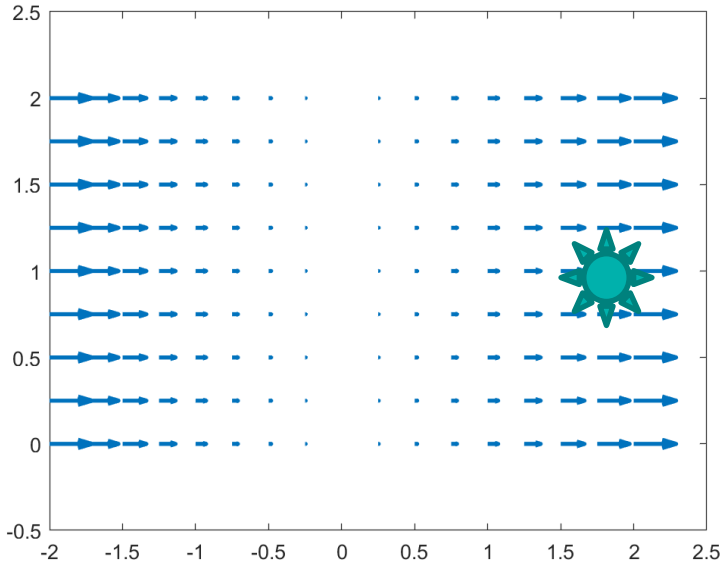
$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Wir betrachten die folgenden Vektorfelder bzgl. ihrer Rotation…



$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$



$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$